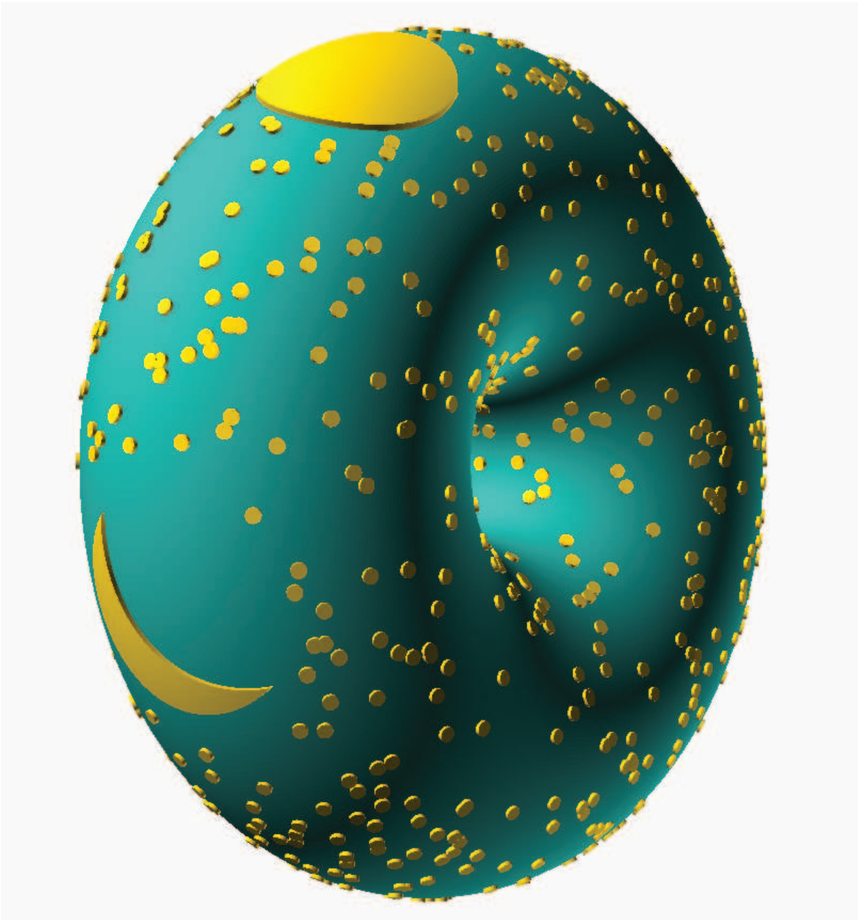
Die WURZEL

Zeitschrift für Mathematik 2,50 €

Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten e.V.



September/Oktober 2023 57. Jahrgang

Wer machte die besseren Verse? Eine mathematische Analyse der Reime von Goethe und Schiller

von Jolanda Paasche, Leipzig

Der Artikel basiert auf einer Facharbeit, die die Autorin im Jahr 2022 geschrieben hat.

1 Einleitung

Beim Schreiben von Texten und Nachrichten fiel mir auf, dass die Autokorrektur häufig Wörter vervollständigte, Tippfehler korrigierte oder ähnliche Wörter vorschlug. Daraus ergab sich die Frage, wie die Ähnlichkeit von Wörtern bestimmt werden kann, um geeignete Wortvorschläge zu finden. Um gute und schlechte Vorschläge voneinander unterscheiden zu können, muss die Ähnlichkeit von Wörtern messbar sein.

Neben der Autokorrektur von Texten ist die Frage der Ähnlichkeit von Wörtern auch wichtig, um z. B. DNS-Sequenzen zu vergleichen, die, analog zu Wörtern, als Folge von Buchstaben dargestellt werden. Für mich ergab sich die Fragestellung, ob man mit einer Ähnlichkeitsanalyse von Wörtern auch literarische Textformen untersuchen kann. Als Beispiel werden die Reime zweier Gedichte von Goethe und Schiller analysiert.

Als mathematische Werkzeuge werden dazu Editierdistanzen, welche die Unähnlichkeit von Wörtern messen können, verwendet. Um die zugehörige Theorie soll es als Erstes gehen.

2 Grundbegriffe

Vor der Einführung der Editierdistanzen werden einige grundlegende Definitionen zu Wörtern und Metriken benötigt.

Definition 1.

1. Ein *Alphabet* ist eine endliche nichtleere Menge voneinander unterscheidbarer Symbole. Diese Symbole werden auch *Buchstaben* genannt.
2. Sei V ein Alphabet. Ein *Wort* w ist eine endliche Folge von Buchstaben (w_i), $i = 1, \dots, n$, mit $w_i \in V$ für alle i. Eine leere Buchstabenfolge wird als das leere Wort ε bezeichnet.
3. Die *Kleenesche Hülle* W^* des Alphabets V bezeichnet die Menge aller Wörter, die mit den Elementen aus V gebildet werden können.

Die Menge W der in einer Sprache verwendeten Wörter ist offenbar eine Teilmenge von W^*. Die Länge $|w|$ eines Wortes entspricht der Anzahl der Buchstaben in w, insbesondere ist also $|\varepsilon| = 0$.

Eine Menge mit einer Struktur wird als Raum bezeichnet, die Elemente der Menge werden dann auch Punkte genannt. Für die Struktur gibt es im Allgemeinen viele unterschiedliche Möglichkeiten. Sie kann auf einer Eigenschaft der Elemente der Menge beruhen, den Beziehungen zwischen den Elementen usw. Ein Beispiel für eine auf Elementbeziehungen beruhenden Struktur ist eine Metrik. Dabei handelt es sich um eine Funktion, die die Distanz zwischen zwei Punkten angibt.

Definition 2. Eine *Metrik* ist eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$, die für alle Elemente $m_1, m_2, m_3 \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) positive Definitheit: $d(m_1, m_2) \geq 0$ und $d(m_1, m_2) = 0 \iff m_1 = m_2$,

(ii) Symmetrie: $d(m_1, m_2) = d(m_2, m_1)$,

(iii) Dreiecksungleichung: $d(m_1, m_3) \leq d(m_1, m_2) + d(m_2, m_3)$.

Die zugrunde liegende Menge wird im Folgenden immer eine Menge W von Wörtern über einem Alphabet sein. Durch welche Metriken diese zu einem metrischen Raum werden kann, ist Thema des nächsten Abschnitts.

3 Editierdistanzen

Mit Editierdistanzen können die Unterschiede zwischen Wörtern gemessen werden. Für die Ermittlung dieser Unterschiede steht im Allgemeinen eine Menge $\mathcal{O}$ an Operationen zur Verfügung, die z. B. die folgenden Umwandlungsfunktionen enthalten kann:

1. Löschen des Buchstabens an Position i in einem Wort u. Alle Buchstaben rechts von i werden nach links verschoben, sodass keine Lücke an der Stelle des gelöschten Buchstabens entsteht. Für das resultierende Wort v gilt also $v_j = u_j$ für $1 \leq j < i$ und $v_j = u_{j+1}$ für $i \leq j \leq |u| - 1$.
2. Einfügen eines Buchstabens b an Position i in einem Wort u. Alle Buchstaben rechts von i werden um eine Position nach rechts verschoben. Für das resultierende Wort v gilt also $v_j = u_j$ für $1 \leq j < i$, $v_i = b$ und $v_j = u_{j-1}$ für $i < j \leq |u| + 1$.

Ist W^* die Kleenesche Hülle eines Alphabets V und hat man zwei Wörter $u, v \in W^*$, so lässt sich u möglicherweise durch eine endliche Folge (o_i), $i = 1, \ldots, m$, von Editieroperationen $o_i \in \mathcal{O}$ in v umwandeln, d. h. $u = (o_i)(v) := o_m(o_{m-1}(\ldots o_2(o_1(v)) \ldots))$. Jede dieser Editieroperationen o_i ist mit Kosten $C(o_i)$ verbunden, wobei $C(o_i) \in \mathbb{R}_0^+$ und $C((o_i)) = \sum_{i=1}^m C(o_i)$ ist. Über diese Art Kostenfunktion C lassen sich nun Editierdistanzen definieren.

Definition 3. Die *Editierdistanz* zwischen zwei Wörtern $u, v \in W^*$ bezüglich einer Menge $\mathcal{O}$ von Editieroperationen und einer Kostenfunktion $C : \mathcal{O} \to \mathbb{R}_0^+$ ist definiert als die Kosten der günstigsten Folge von Editieroperationen, die u in v umwandelt.

Gibt es keine Menge von Editieroperationen, durch die u in v umgewandelt werden kann, so gibt es keine gemäß der obigen Definition günstigste Folge von Editieroperationen. Der Abstand zwischen u und v ist dann das Minimum der leeren Menge, also ∞.

Wenn $\mathcal{O}$ nur aus den Elementen „Löschen" und „Einfügen" besteht und die Kosten für eine Lösch- bzw. Einfügeoperation jeweils 1 sind, wird die Editierdistanz als *Basiseditierdistanz* bezeichnet.

Neben dem Löschen und Einfügen kann man aber auch weitere Operationen zu $\mathcal{O}$ hinzunehmen. Zum Beispiel könnte der Buchstabe an Position i in einem Wort durch einen anderen ersetzt werden. Eine solche Ersetzung lässt sich als Folge einer Lösch- und einer Einfügeoperation beschreiben. Ebenso kann die Ersetzung aber auch als eigenständige Operation mit eigenen Kosten betrachtet werden. Analog kann man die Transposition, also das Vertauschen zweier Buchstaben in einem Wort, zu $\mathcal{O}$ hinzunehmen.

Auf diese Weise lassen sich verschiedene Editierdistanzen erhalten, die bekanntesten sind in der folgenden Tabelle aufgeführt (die Kosten der aufgeführten Operationen betragen dabei jeweils 1):

Tab. 1 Populäre Editerdistanzen und ihre jeweilige Menge der Editieroperationen

Editierdistanz	Elemente von $\mathcal{O}$
Basiseditierdistanz	Löschen, Einfügen
Levenshtein-Distanz	Löschen, Einfügen, Ersetzen
Damerau-Levenshtein-Distanz	Löschen, Einfügen, Ersetzen, Transposition
Hamming-Distanz	Ersetzen

Das Wort „Distanz" trat nun schon ziemlich häufig in diesem Abschnitt auf, noch ist aber gar nicht gezeigt worden, dass diese Bezeichnung gerechtfertigt ist. Deswegen ist zunächst noch festzuhalten:

Satz 1. *Jede der in Tabelle 1 aufgeführten Editierdistanzen ist eine Metrik.*

Beweis. Es wird hier nur der Beweis dafür, dass die Basiseditierdistanz eine Metrik ist, vorgestellt. Die Beweise für die anderen Editierdistanzen erfolgt analog.

Zunächst ist klar, dass der Abstand zwischen zwei Wörtern u, v immer 0 oder positiv ist, denn die Kosten für eine Lösch- oder Einfügeoperation betragen 1. Außerdem ist der Abstand genau dann 0, wenn $u = v$ gilt, denn genau in diesem Fall ist keine Lösch- oder Einfügeoperation nötig, um u in v umzuwandeln. Die Basiseditierdistanz ist also positiv definit.

Für den Beweis der Symmetrie der Basiseditierdistanz wird angenommen, dass eine Folge (o_i) von Editieroperationen existiert, die u in v umwandelt. Durch Ersetzungen aller Löschoperationen in (o_i) durch Einfügeoperationen (für die entsprechenden Buchstaben) sowie aller Einfügeoperationen durch Löschoperationen und anschließender Umkehrung der Reihenfolge der Operationen erhält man eine Folge $(\tilde{o}_i)$. Diese transformiert v in u und enthält genauso viele Operationen wie (o_i), verursacht also die gleichen Kosten. Analog kann man aus jeder Folge, die v in u umwandelt, eine Folge mit den gleichen Kosten konstruieren, die u in v umwandelt. Das zeigt, dass die Basiseditierdistanz symmetrisch ist.

Für den Beweis der Gültigkeit der Dreiecksungleichung sei zunächst (o_i) eine Folge von Editieroperationen mit minimalen Kosten, die u in v umwandelt. Angenommen, es gibt eine Folge von Editieroperationen $(\tilde{o}_i)$ mit minimalen Kosten, die u in ein weiteres Wort w transformiert, und eine weitere Folge von Editieroperationen $(\hat{o}_i)$ mit minimalen Kosten, die w in v umwandelt. Dann wandelt die Folge von Editieroperationen, die durch Komposition von $(\hat{o}_i)$ und $(\tilde{o}_i)$ entsteht, u in v um. Die Kosten dieser Folge sind per Definition mindestens genauso hoch wie die von (o_i). Also ist der Abstand von u zu v höchstens so groß wie die Summe der Abstände von u zu w und von w zu v. $\square$

Da für die Reimanalyse im Folgenden die Levenshtein-Distanz verwendet werden soll, wird auf diese jetzt noch ein etwas genaueres Augenmerk gelegt. Wie in Tabelle 1 bereits angedeutet, besteht $\mathcal{O}$ hier aus den Operationen „Löschen“, „Einfügen“ und „Ersetzen“, wobei die Kosten dieser Operationen jeweils 1 betragen. Für ein Wort $w \in W^* \setminus \{\varepsilon\}$ seien w_1 der erste Buchstabe von w und w^* das Wort, das durch Löschen des ersten Buchstabens von w entsteht. Dann gilt:

Satz 2. *Die Levenshtein-Distanz* $d_{\text{lev}}(u, v)$ *zwischen zwei Wörtern* u *und* v *lässt sich rekursiv bestimmen durch*

$$d_{\text{lev}}(u,v) = \begin{cases} |u|\,, & \textit{wenn } v = \varepsilon, \\ |v|\,, & \textit{wenn } u = \varepsilon, \\ d_{\text{lev}}(u^*, v^*)\,, & \textit{wenn } u_1 = v_1, \\ 1 + \min\bigl\{d_{\text{lev}}(u^*, v), d_{\text{lev}}(u, v^*), d_{\text{lev}}(u^*, v^*)\bigr\}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Der etwas technische, aber keineswegs komplizierte, Beweis dieses Satzes bleibt dem geneigten Leser überlassen.

Satz 2 liefert die Grundlage für einen rekursiven Algorithmus zur Bestimmung der Levenshtein-Distanz zwischen zwei Wörtern. Wie das funktioniert, soll beispielhaft an den beiden Wörtern $u = (\mathrm{K}, \mathrm{n}, \mathrm{e}, \mathrm{c}, \mathrm{h}, \mathrm{t}, \mathrm{e})$ und $v = (\mathrm{M}, \mathrm{ä}, \mathrm{c}, \mathrm{h}, \mathrm{t}, \mathrm{e})$ erklärt werden. Die Buchstaben der Wörter werden als Zeilen- bzw. Spaltenköpfe in eine Tabelle geschrieben. Vor den jeweils ersten Buchstaben werden jeweils noch eine Zeile bzw. Spalte für ein leeres Wort ε eingefügt. In die zweite Zeile werden die Editierkosten der Levenshtein-Distanz geschrieben, um u in ein leeres Wort umzuwandeln. Dabei werden die Buchstaben in u von vorne nach hinten gelöscht und die Editierkosten erhöhen sich mit jeder Löschung um 1. Analog wird die zweite Spalte für v befüllt.

Tab. 2 Vorgehen zur Bestimmung der Levenshtein-Distanz

	ε	K	n	e	c	h	t	e
ε	0	1	2	3	4	5	6	7
M	1	1						
ä	2							
c	3							
h	4							
t	5							
e	6							

	ε	K	n	e	c	h	t	e
ε	0	1	2	3	4	5	6	7
M	1	1	2	3	4	5	6	7
ä	2	2	2	3	4	5	6	7
c	3	3	3	3	3	4	5	6
h	4	4	4	4	4	3	4	5
t	5	5	5	5	5	4	3	4
e	6	6	6	5	6	5	4	3

Die noch offenen Felder werden nun iterativ von oben nach unten und von links nach rechts gefüllt. Die in ein Feld einzutragende Distanz ergibt sich dabei aus den Distanzen in den drei Nachbarfeldern, die den vorstehenden Buchstaben in den Wörtern u und v entsprechen. Im linken Teil von Tabelle 2 ist das aktuell zu befüllende Feld rot hinterlegt, dessen Nachbarfelder zu den vorstehenden Buchstaben grün. Da sich $u_1 = \mathrm{K}$ und $v_1 = \mathrm{M}$ unterscheiden, entspricht gemäß Satz 2 die Zahl im rot hinterlegten Feld 1 plus dem Minimum der drei Zahlen in den grün hinterlegten Feldern. Die vollständig ausgefüllte Tabelle ist dann im rechten Teil von Tabelle 2 zu sehen, es ergibt sich also $d_{\mathrm{lev}}((\mathrm{K}, \mathrm{n}, \mathrm{e}, \mathrm{c}, \mathrm{h}, \mathrm{t}, \mathrm{e}), (\mathrm{M}, \mathrm{ä}, \mathrm{c}, \mathrm{h}, \mathrm{t}, \mathrm{e})) = 3$ (rot hinterlegtes Feld rechts unten). Der Tabelle kann man auch die Abstände von Teilwörtern entnehmen, so wäre z. B. $d_{\mathrm{lev}}((\mathrm{K}, \mathrm{n}, \mathrm{e}, \mathrm{c}), (\mathrm{M}, \mathrm{ä}, \mathrm{c}, \mathrm{h}, \mathrm{t})) = 5$ (gelb hinterlegtes Feld).

4 Anwendung auf die Reimanalyse

Die direkte Anwendung von Editierdistanzen auf Reime scheitert an der schlechten Vergleichbarkeit der Abstände unterschiedlicher Wortpaare. Angenommen, der Abstand zweier Wörter u und v wäre $d_{\mathrm{lev}}(u, v) = 2$. Für

$|u| = |v| = 2$ sind die Wörter dann offensichtlich unterschiedlich, für $|u| = |v| = 20$ würde $d_{\text{lev}}(u, v) = 2$ dagegen auf nur sehr geringe Unterschiede zwischen u und v hindeuten.

Deswegen wird die Wortlänge in die Formel zur Ermittlung der Ähnlichkeit zweier Wörter mit eingehen müssen.

Definition 4. Die *Ähnlichkeit* zweier Wörter u, v bzgl. der Levenshtein-Distanz ist

$$s_{\text{lev}}(u, v) = \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } |u| = |v| = 0\,, \\ 1 - \frac{d_{\text{lev}}(u,v)}{\max\{|u|,|v|\}}\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die *mittlere Ähnlichkeit* über eine Folge (u_j, v_j), $j = 1, \ldots, r$, von Wortpaaren ist

$$s_{\text{lev}}\big((u_j, v_j)_j\big) = \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } \sum\limits_{j=1}^{r} \max\{|u_j|, |v_j|\} = 0\,, \\ 1 - \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{r} d_{\text{lev}}(u_j, v_j)}{\sum\limits_{j=1}^{r} \max\{|u_j|, |v_r|\}}\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Leicht zu sehen ist, dass s_{lev} immer einen Wert zwischen 0 und 1 annimmt. Je näher der Wert von s_{lev} an 1 liegt, desto ähnlicher sind sich die beiden verglichenen Wörter bzw. Wortfolgen.[1]

Als Gedichte habe ich mir *Der Zauberlehrling* von Johann Wolfgang von Goethe und *Der Ring des Polykrates* von Friedrich Schiller gewählt. Beide Gedichte haben ungefähr die gleiche Anzahl Reime und eignen sich daher für eine vergleichende Analyse. Da Gedichte nicht nur gelesen, sondern auch mündlich vorgetragen werden, kann die Ähnlichkeit sowohl anhand der Buchstabenfolgen als auch anhand der Aussprache vorgenommen werden, wobei man die Aussprache mittels Zeichen eines phonetischen Alphabets verschriftlichen kann. Ich habe die Gedichte, wie sie ein Sprecher des Hochdeutschen heute artikulieren würde, daher in das Internationale Pho-

[1] *Anm. d. Red.:* Bei der Definition der mittleren Ähnlichkeit handelt es sich nicht um eine Standarddefinition und es bleibt sicherlich noch Raum für Diskussionen. Man könnte z. B. alternativ

$$s_{\text{lev}}((u_j, v_j)_j) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} s_{\text{lev}}(u_j, v_j)$$

definieren. Die beiden Definitionsvarianten würden für die Werte der mittleren Ähnlichkeit verschiedener Folgen zum Teil sehr unterschiedliche Ergebnisse liefern.

netische Alphabet (IPA) übertragen. Die ersten Zeilen der Gedichte (inkl. der Kennzeichnung der für die Reimanalyse relevanten Zeichen) sind in den Tabellen 3 und 4 dargestellt. Die Zahlen in den linken Spalten der Tabellen geben jeweils die Reimpaare an.

Tab. 3 Die ersten acht Verse des Gedichts *Der Zauberlehrling*

	Gedicht im deutschen Alphabet	Gedicht in Lautschrift (IPA)
1	Hat der alte Hexen*meister*	hat deːɐ̯ altə hɛksən*maɪ̯stɐ*
2	Sich doch einmal wegbe*geben*!	zɪç dɔx aɪ̯nmaːl veːkbə*geːbən*
1	Und nun sollen seine *Geister*	ʊnt nuːn zɔlən zaɪ̯nə *gaɪ̯stɐ*
2	Auch nach meinem Willen *leben*	aʊ̯x naːx maɪ̯nəm vɪlən *leːbən*
3	Seine Wort und *Werke*	zaɪ̯nə vɔɐ̯t ʊnt *vɛɐ̯kə*
4	Merkt ich und den *Brauch*,	mɛɐ̯kt ɪç ʊnt deːn *bʁaʊ̯x*
3	Und mit Geistes*stärke*	ʊnt mɪt gaɪ̯stɛs*ʃtɛɐ̯kə*
4	Tu ich Wunder *auch*.	tuː ɪç vʊndɐ *aʊ̯x*

Tab. 4 Die ersten acht Verse des Gedichts *Der Ring des Polykrates*

	Gedicht im deutschen Alphabet	Gedicht in Lautschrift (IPA)
1	Er stand auf seines Daches *Zinnen*,	eːɐ̯ ʃtant aʊ̯f zaɪ̯nəs daxəs *tsɪnən*
1	Er schaute mit vergnügten *Sinnen*	eːɐ̯ ʃaʊ̯tə mɪt fɛɐ̯gnyːktən *zɪnən*
2	Auf das beherrschte Samos *hin*.	aʊ̯f das bəhɛɐ̯ʃtə zamoːs *hɪn*
3	„Das alles ist mir unter*tänig*“,	diːs aləs ɪst miːɐ̯ ʊntɐ*tɛːnɪç*
3	Begann er zu Ägyptens *König*,	bəgan eːɐ̯ t͡suː ɛgʏptəns *køːnɪç*
2	„Gestehe, dass ich glücklich *bin*.“	gəʃteːə das ɪç glʏklɪç *bɪn*
4	„Du hast der Götter Gunst er*fahren*	duː hast deːɐ̯ gœtɐ̯ gʊnst *ɛɐ̯faːʁən*
4	Die vormals deinesgleichen *waren*,	diː foːɐ̯maːls daɪ̯nəsglaɪ̯çən *vaːʁən*

Anschließend habe ich s_{lev} sowohl für die Reime bzgl. des deutschen Alphabets als auch bzgl. des IPA berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zu sehen.

Tab. 5 Mittlere Ähnlichkeiten der Gedichte

	Der Zauberlehrling	Der Ring des Polykrates
s_{lev} bzgl. dt. Alphabet	0,68	0,66
s_{lev} bzgl. IPA	0,67	0,69

Aus diesen Ähnlichkeiten ergibt sich mir folgendes Bild: Schillers Reime klingen vermutlich etwas ähnlicher, Goethes Reime sind dagegen dem deutschen Schriftalphabet nach einander näher. Diese Annahme sollte auf der Basis dieser zwei Gedichte natürlich nicht verallgemeinert werden, da sich anhand einer so geringen Auswahl von Texten keine eindeutigen Aussagen treffen lassen. Des Weiteren ist zu bedenken, dass beide Lyriker in einer Zeit wirkten, in der noch keine allgemeingültige Regelung der Rechtschreibung festgelegt war und man Gedichte auch nicht unbedingt in heutigem Hochdeutsch vortrug. Die Analyse spiegelt also eine eher gegenwärtige Perspektive wieder.

5 Zusammenfassung

Abschließend lässt sich festhalten, dass Distanzen und Ähnlichkeiten zwischen Wörtern messbar sind und zur vergleichenden Analyse von Reimen verwendet werden können. Dabei können die Ergebnisse je nach gewähltem Medium des gleichen Textes, Schriftform oder Aussprache, unterschiedlich ausfallen. Wer nun die besseren Reime machte, Goethe oder Schiller, lässt sich auf Grundlage dieser Betrachtung nicht klären.

In eigener Sache

Leider geht die Inflation auch an uns nicht spurlos vorüber. Aufgrund der gestiegenen Kosten in vielen Bereichen, die auch die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ betreffen, sehen wir uns gezwungen, die Heftpreise ab dem kommenden Jahr zu erhöhen.

Ab Januar 2024 wird der Einzelheftpreis für die Druckausgabe 1,75 € betragen. Für den Versand innerhalb Deutschlands werden wir ab dann ebenfalls 1,75 € berechnen, für den internationalen Versand 2,50 €. Die Digitalausgabe wird 3,00 € pro Einzelheft kosten (versandkostenfrei).

Für die Jahresabonnements werden ab nächstem Jahr die folgenden Preise gelten:

- für die **Digitalausgabe** 36 €,
- für die **Druckausgabe** 42 € (inkl. Versand innerhalb Deutschlands) bzw. 51 € (inkl. Versand international).
- Falls Sie **sowohl die Druck- als auch die Digitalausgabe** im Jahresabonnement erhalten möchten, berechnen wir 48 € (inkl. Versand innerhalb Deutschlands) bzw. 57 € (inkl. Versand international).

Fördermitglieder erhalten selbstverständlich weiterhin die Druck- und die Digitalausgabe. Wenn Sie uns unterstützen möchten, würden wir uns freuen, wenn Sie eine Fördermitgliedschaft in Erwägung zögen.

Sebastian Stock im Namen der $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Redaktion

Lösungen der √WURZEL-Aufgaben aus den Heften 1/23 bis 6/23

Zu den Aufgaben 2023-1 bis 2023-30 aus den Heften 1/23 bis 6/23 erreichten uns bis zum 1. August 2023 von folgenden Lesern korrekte Lösungen:

Einsender	1–6	7–12	13–18	19–24	25–30
Ulrich Abel, Friedberg	·····●	····●·	·····●	·····●	······
Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien und Herzegowina	·●···●	··●●··	······	······	······
Walter Börner, Forchheim	······	······	·●··●·	······	······
Peter Baum, Kassel	······	······	·●··●·	······	······
Mihály Bencze, Brașov, Rumänien	······	······	······	······	·●●···
Jörg Berner, Erfurt	······	··●···	······	······	······
Gerhard Dietel, Regensburg	○·●·●○	●●●●●●	●●·●●●	●·●●●●	●···●●
Karl Fegert, Neu-Ulm	······	··●···	······	······	····●·
Rolf Felder, Herrenberg	●○●·●·	··●·○·	○●●●·●	●●●○●●	·●··●●
Xaver Fichtl, Lindau	······	······	·●··●·	······	●···○·
Udo Flöthmann, Oberkirch	·●··●·	·●●·○·	·●●···	·●●·●·	·●●·●●
Hermann Forster, Wiesloch	·●○○●·	●●●●○·	●●●·●·	●●●·●●	●●●···
Bernd Fritzen, Münster	······	··●·●·	·●●···	··●●●●	●●··●●
Michael Giglberger, Deggendorf	······	●·····	·●··●·	······	●·●··●
Walter Höhlhubmer, Linz, Österreich	······	······	······	······	·····●
Wilfried Haag, Korntal	······	······	······	·····●	●·····
Stephan Hauschild, Chemnitz	···○●·	··●···	······	······	······
Michael Huke, Hofgeismar-Hümme	····●●	··●·●·	○●●●·●	●·●●●●	······
Joachim Jäger, Saarbrücken	······	······	······	·●···●	·●····
Dieter Kaiser, Kahla	●·····	······	·····●	······	·····●
Wolfgang Kirschenhofer, Herzogenburg, Österreich	······	··●·●·	·●····	··●·●●	·●●·●·
Ernst Klimsa, Schwandorf	··●·●○	·●··●·	·●●···	··●○●·	○●●·●●
Hartmud Koch, Siegen	●····●	····●·	····●●	···●·●	●···●●
Ralf Kozian, Villingen-Schwenningen	······	·····○	······	●····●	······
Karl Heinz Kriegl, Sonthofen	······	····●·	●●··●●	····●●	·●··●·
Mattias Lindquist, Magdeburg	······	······	······	·····●	······
Reiner Möwald, Germersheim	·●●●●○	··●●○●	·●●●●○	●●●·○●	●●●●○●
Manfred Müller-Späth, Ahrensburg	··●●●●	●○●●·●	·●··●●	·●●·●●	●●··●●
Mathe-AG, Söderblom-Gymnasium Espelkamp	·····●	······	······	······	······
Johannes Oßwald, Gäufelden	······	···●··	······	···●··	·····●
Gerhard Palme, Schwabmünchen	·●·●●·	·●●●●·	○●●·●·	·●●·●●	●···●●
Eigbert Riewald, Magdeburg	······	······	······	······	····●·

Uwe Rilling, Fronreute/Staig	·●····	······	······	······	······
Hans Schmidt, Magdeburg	··○·●●	·●●●·●	●●●●●●	·●·●●●	●●●●··
Walter Schmidt, Wetzlar	·●○·●●	·●●○··	·●●···	○●●●○●	··●···
Hans Schnabel, Münster	···●··	···●··	●····●	····●●	······
Tobias Schoel, Neubrandenburg	······	···●··	······	······	······
Gisela Schuller, Siegen	····●·	·●●●●·	·●●●··	··●·●·	●●●···
Armin Singer, Jena	······	······	······	······	●·····
Eckard Specht, Magdeburg	·●·○●●	●●●●○·	·●●·●·	·●··●●	●●●··●
Peter Starek, Donauwörth	·●●···	······	··●···	······	·····●
Jürgen Wagner, Ahnatal	······	······	······	·····●	····●·
Stefan Welke, Bonn	······	······	·●·●●·	······	······
●=richtig ○=kleine Fehler/teilweise gelöst ·=nicht eingesandt/Lösung falsch					

2023-1 Reiner Möwald, Germersheim

Man bestimme die Anzahl aller Sextupel positiver natürlicher Zahlen (a, b, c, d, e, f) mit $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f = 38$, sodass die Zahlen a, b, c, d, e, f paarweise teilerfremd sind.

Lösung von Hartmud Koch, Siegen:

Anmerkung der Redaktion: So, wie die Aufgabe gestellt ist, könnten mehrere der Zahlen eines Sextupels, das die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, 1 sein, da 1 zu sich selbst teilerfremd ist. Das war so nicht beabsichtigt, die Zahlen eines Sextupels sollten alle verschieden sein. Die Bedingung $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f = 38$ in der Aufgabenstellung hätte also eigentlich $a < b < c < d < e < f = 38$ lauten sollen. Die meisten Löser haben die Aufgabe auch unter dieser Bedingung gelöst und wir möchten an dieser Stelle eine dieser Lösungen vorstellen.

Wegen $f = 38$ dürfen die Zahlen a, b, c, d, e weder durch 2 noch durch 19 teilbar sein. Übrig bleiben die 18 Zahlen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37.$$

Die Zahlen in $M := \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37\}$ sind paarweise teilerfremd mit $|M| = 11$. Um aus M fünf Zahlen für a bis e auszuwählen, hat man also $\binom{11}{5}$ Möglichkeiten. Weitere Kombinationen sind mit den Zahlen $9, 15, 21, 27, 33$ sowie 25 und 35 möglich:

- Zusätzlich zu 9 oder 27 lassen sich vier Zahlen aus $M \setminus \{3\}$ auswählen, analog zur 25 vier Zahlen aus $M \setminus \{5\}$. Das ergibt $3 \cdot \binom{10}{4}$ Möglichkeiten.
- Zusätzlich zur 15 lassen sich vier Zahlen aus $M \setminus \{3, 5\}$ auswählen, analog zur 21 vier Zahlen aus $M \setminus \{3, 7\}$, zur 33 vier Zahlen aus $M \setminus \{3, 11\}$ und zur 35 vier Zahlen aus $M \setminus \{5, 7\}$. Das ergibt $4 \cdot \binom{9}{4}$ Möglichkeiten.

- Um zu 9 und 25 bzw. zu 27 und 25 drei Zahlen aus $M\backslash\{3,5\}$ auszuwählen, hat man $2 \cdot \binom{9}{3}$ Möglichkeiten.
- Zusätzlich zu 9 und 35 lassen sich drei Zahlen aus $M\backslash\{3,5,7\}$ auswählen, ebenso zu 27 und 35 oder zu 21 und 25. Analog kann man zu 33 und 25 drei Zahlen aus $M \setminus \{3,5,11\}$ auswählen. Das ergibt insgesamt $4 \cdot \binom{8}{3}$ Möglichkeiten.
- Schließlich gibt es $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten, zu 33 und 35 drei Zahlen aus $M \setminus \{3,5,7,11\}$ auszuwählen.

Insgesamt sind das

$$\binom{11}{5} + 3 \cdot \binom{10}{4} + 4 \cdot \binom{9}{4} + 2 \cdot \binom{9}{3} + 4 \cdot \binom{8}{3} + \binom{7}{3} = 2023$$

Möglichkeiten für die Auswahl von Sextupeln (a,b,c,d,e,f) paarweise teilerfremder natürlicher Zahlen $a < b < c < d < e < f = 38$.

2023-2 Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbien

Es seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x + y + z = 3$. Man zeige:

$$\frac{zx}{4-x} + \frac{xy}{4-y} + \frac{yz}{4-z} \leq 1\,.$$

Lösung von Eckard Specht, Magdeburg:

Die Nenner auf der linken Seite der Behauptung werden unter Verwendung von $x + y + z = 3$ umgeformt zu

$$\frac{1}{4-x} = \frac{3}{x+4y+4z}\,, \quad \frac{1}{4-y} = \frac{3}{4x+y+4z} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4-z} = \frac{3}{4x+4y+z}\,.$$

Damit ist die Behauptung äquivalent zu

$$\frac{3zx}{x+4y+4z} + \frac{3xy}{4x+y+4z} + \frac{3yz}{4x+4y+z} \leq 1\,. \tag{1}$$

Nach der Engel-Form der Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\frac{2}{2z+y} + \frac{1}{2y+x} = \frac{4}{4z+2y} + \frac{1}{2y+x} \geq \frac{(2+1)^2}{x+4y+4z} = \frac{9}{x+4y+4z}\,.$$

Zusammen mit den durch zyklische Vertauschung von x, y, z in dieser Ungleichung entstehenden Ungleichungen folgt daraus durch Multiplikation der

Brüche mit $\frac{1}{3}$ sowie zx, xy bzw. yz und anschließender Addition aller drei Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{3zx}{x+4y+4z} + \frac{3xy}{4x+y+4z} + \frac{3yz}{4x+4y+z} \\
&\qquad \le \frac{1}{3}\left(\frac{2zx}{2z+y} + \frac{zx}{2y+x} + \frac{2xy}{2x+z} + \frac{xy}{2z+y} + \frac{2yz}{2y+x} + \frac{yz}{2x+z}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{3}\left(\frac{2zx+xy}{2z+y} + \frac{2xy+yz}{2x+z} + \frac{2yz+zx}{2y+x}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{3}(x+y+z) = 1\,.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von (1) erbracht. Gleichheit gilt nur für $x = y = z = 1$.

2023-3 Eckard Specht, Magdeburg

Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b, c, d, die nicht alle gleichzeitig Null sind, gilt die Ungleichung

$$\frac{ab+bc+cd}{a^2+b^2+c^2+d^2} \le \cos\frac{\pi}{5}\,.$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Lösung von Reiner Möwald, Germersheim:

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot b^2 \ge 2ab\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = ab\cdot\left(\sqrt{5}-1\right), \tag{1}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot b^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot c^2 \ge 2bc\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2} = bc\cdot\left(\sqrt{5}-1\right), \tag{2}$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot c^2 + d^2 \ge 2cd\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = cd\cdot\left(\sqrt{5}-1\right). \tag{3}$$

Durch Addition der Ungleichungen (1), (2) und (3) erhalten wir

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \ge (ab+bc+cd)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Für $a^2+b^2+c^2+d^2 \ne 0$ folgt nun sofort

$$\frac{ab+bc+cd}{a^2+b^2+c^2+d^2} \le \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos\frac{\pi}{5}\,.$$

Aus der Herleitung folgt die Gleichheit für

$$(a,b,c,d) = \left(r,\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot r,\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot r,\ r\right) \qquad \text{mit } r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Anmerkung: Die als bekannt vorausgesetzte Identität $\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos\frac{\pi}{5}$ lässt sich zum Beispiel mithilfe eines Teildreiecks eines regelmäßigen Fünfecks, das aus einer Fünfeckdiagonale und zwei Fünfeckseiten besteht, herleiten.

2023-4 Alfred Faulhaber, Schwabach

Ein Rechteck heiße folgsam, wenn seine Seitenlängen a und b natürliche Zahlen sind, die sich um 1 unterscheiden. Man bestimme die Seitenlänge des kleinsten Quadrates, das sich vollständig in paarweise verschiedene folgsame Rechtecke zerlegen lässt.

Lösung von Hans Schnabel, Münster:

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei Q_n das Quadrat der Seitenlänge n und F_n das folgsame Rechteck mit den Seitenlängen n und $n-1$. Sei $\mathcal{F} = \{F_n : n \geq 2\}$ die Menge der folgsamen Rechtecke. Ein Tupel $(f_1,\dots,f_k)$ mit $f_i \in \mathcal{F}$ und $f_i \neq f_j$ für $i \neq j$ heißt erlaubte Zerlegung, wenn sich Q_n für ein $n \in \mathbb{N}$ überschneidungsfrei durch die f_i überdecken lässt.

Für ein beliebiges Tupel $(f_1,\dots,f_k) \in \mathcal{F}^k$ sei $|(f_1,\dots,f_k)|$ die Summe der Rechteckflächen der f_i. Weiter bezeichne $K_n := \sum_{i=2}^{n} i(i-1)$ für $n \geq 2$ die Summe der Flächen der ersten $n-1$ folgsamen Rechtecke. Wir notieren:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lvert(F_n)\rvert$	2	6	12	20	30	42	56	72	90
K_n	2	8	20	40	70	112	168	240	330

Erste Beobachtungen:

1. Sei $n \geq 5$. Für Q_n gibt es keine erlaubte Zerlegung, die F_{n-1} enthält, weil es nur F_2 gäbe, um den Streifen der Form $1 \times (n{-}2)$ zu überdecken, und $2 < n-2$ ist.
2. Sei $n \geq 2$. Da $|(F_n)|$ eine gerade Zahl ist, existieren erlaubte Zerlegungen nur für Quadrate Q_n mit gerader Seitenlänge n.
3. Sind F_k und F_ℓ in einer erlaubten Zerlegung von Q_n enthalten, so gilt $k-1+\ell-1 \leq n$, d. h. $k+\ell \leq n+2$, denn ansonsten könnten F_k und F_ℓ nicht überschneidungsfrei in Q_n liegen.

Nun werden die einzelnen Quadrate beginnend mit dem kleinsten danach untersucht, ob es für sie eine erlaubte Zerlegung gibt. Wegen 2. müssen nur die Quadrate mit gerader Seitenlänge betrachtet werden.

Q_2 Offensichtlich lässt sich Q_2 nur in F_2 und F_2 zerlegen, was keine erlaubte Zerlegung darstellt.

Q_4 Keine Kombination der Rechtecke F_2, F_3, F_4 hat in Summe die Fläche 16.

Q_6 Da F_k, $k \geq 5$, nach 1. in der Zerlegung nicht vorkommen darf, bleiben nur F_2 bis F_4. Wegen $|(F_2, F_3, F_4)| = 20$ gibt es keine erlaubte Zerlegung.

Q_8 Angenommen, es gäbe eine erlaubte Zerlegung von Q_8. Wegen

$$|(F_2, \ldots, F_5)| = K_5 = 40 < 64$$

muss F_6 in der Zerlegung sein. Wegen 3. ist F_5 dann kein Bestandteil der Zerlegung. Da $|(F_2, F_3, F_4, F_6)| = 50 < 64$ ist, gibt es keine erlaubte Zerlegung von Q_8.

Q_{10} Angenommen, es gäbe eine erlaubte Zerlegung von Q_{10}. Da

$$|(F_2, \ldots, F_6)| = 70 < 100$$

ist, müssen F_7 oder F_8 in der Zerlegung sein.

Wäre F_8 in der Zerlegung, dann dürften wegen 3. höchstens noch F_2, F_3 oder F_4 in der Zerlegung sein, aber $|(F_2, F_3, F_4, F_8)| = 76 < 100$.

Wäre F_7 in der Zerlegung, dann dürften wegen 3. höchstens F_2 bis F_5 in der Zerlegung sein, aber $|(F_2, F_3, F_4, F_5, F_7)| = 40 + 42 < 100$.

Q_{12} Angenommen, es gäbe eine erlaubte Zerlegung Z von Q_{12}. Wegen

$$|(F_2, \ldots, F_7)| = 112 < 144$$

ist eines der Rechtecke F_8, F_9, F_{10} in Z enthalten.

Zu F_{10} können wegen 3. nur noch F_2 bis F_4 in Z liegen, aber

$$|(F_2, F_3, F_4, F_{10})| = 20 + 90 < 144\,.$$

Neben F_9 können nur noch F_2 bis F_5 in Z liegen, was wegen

$$|(F_2, F_3, F_4, F_5, F_9)| = 40 + 72 < 144$$

nicht möglich ist.

Zusätzlich zu F_8 können nur noch F_2 bis F_6 in Z liegen, was wegen

$$|(F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_8)| = 70 + 56 < 144$$

nicht möglich ist.

Q_{14} Angenommen, es gäbe eine erlaubte Zerlegung Z von Q_{14}. Da

$$|(F_2, \ldots, F_8)| = 168 < 196$$

ist, müssen F_9, F_{10}, F_{11} oder F_{12} in Z liegen.
Neben F_{12} können nur noch F_2 bis F_4 in Z sein, aber

$$|(F_2, F_3, F_4, F_{12})| = 20 + 132 < 196\,.$$

Zusätzlich zu F_{11} sind maximal noch F_2 bis F_5 in Z enthalten, aber

$$|(F_2, F_3, F_4, F_5, F_{10})| = 40 + 110 < 196\,.$$

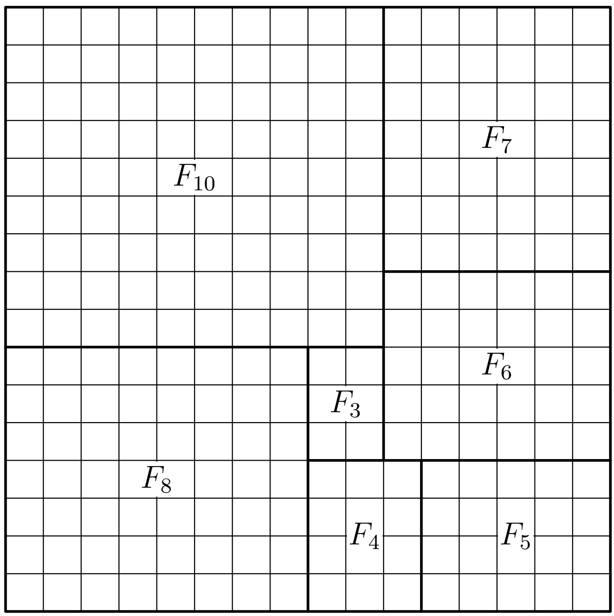
Neben F_{10} können nur noch F_2 bis F_6 in Z sein. Das ist allerdings wegen

$$|(F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_{10})| = 70 + 90 < 196$$

nicht möglich.
Schließlich können zusätzlich zu F_9 nur F_2 bis F_7 in Z liegen, aber

$$|(F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_9)| = 112 + 72 < 196\,.$$

Q_{16} Das Quadrat Q_{16} lässt sich auf die folgende Art in F_3 bis F_8 sowie F_{10} zerlegen:



Damit hat das kleinste Quadrat, dass sich in paarweise verschiedene folgsame Rechtecke zerlegen lässt, die Seitenlänge 16.

2023-5 Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien und Herzegowina

Man beweise für ein beliebiges Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, dem Inkreisradius r und dem halben Umfang s die Ungleichung

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}rs\,.$$

Lösung von Walter Schmidt, Wetzlar:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt die Formel $F = rs$. Die zu beweisende Ungleichung lautet damit $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}F$.

Zunächst wird die folgende Ungleichung gezeigt:

$$4\sqrt{3}F \leq a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2\,. \tag{1}$$

Beweis. Setze $x = s - a$, $y = s - b$ und $z = s - c$. Dann gilt $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ und $s = x + y + z$. Nach der Heron-Formel berechnet sich der Flächeninhalt durch

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}\,.$$

Ungleichung (1) ist dann äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} \leq (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 \\
& \qquad\qquad - (x-y)^2 - (y-z)^2 - (z-x)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{3xyz(x+y+z)} \leq xy + yz + zx \\
\Leftrightarrow \quad & 3xyz(x+y+z) \leq (xy + yz + zx)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \leq (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 \\
& \qquad - (xy)(xz) - (xy)(yz) - (xz)(yz) \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \leq \frac{(xy - xz)^2 + (xy - yz)^2 + (xz - yz)^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offenbar immer erfüllt und damit ist Ungleichung (1) bewiesen. □

Ungleichung (1) ist nun äquivalent zu

$$\begin{aligned}
ab + bc + ca &\geq 4\sqrt{3}F + a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\
&= 4\sqrt{3}F + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \\
&\geq 4\sqrt{3}F = 4\sqrt{3}rs
\end{aligned}$$

und damit ist die zu zeigende Ungleichung bewiesen.

2023-6 ursprünglich veröffentlicht als Aufgabe E 24 in $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 4/1973

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Man beweise, dass für alle Punkte M der Ebene die Ungleichung

$$|AM| \leq |BM| + |CM|$$

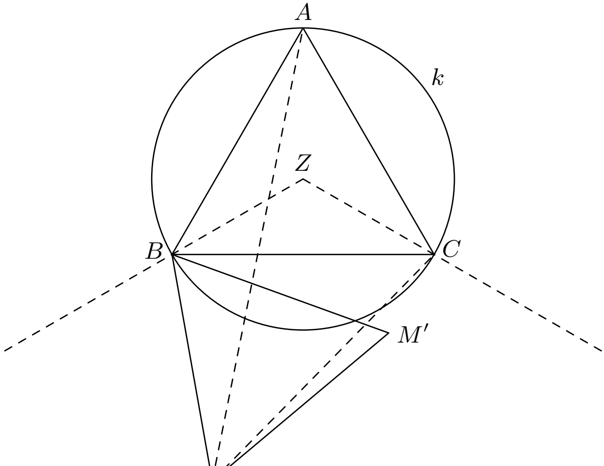
gilt. Für welche Punkte gilt Gleichheit?

Lösung von der Mathe-AG des Söderblom-Gymnasiums Espelkamp:

Es sei k der Umkreis von ABC und Z der Mittelpunkt von k. Alle Punkte M, die sich bzgl. der Mittelsenkrechten BZ der Seite $\overline{AC}$ in der Halbebene, die A enthält, befinden, liegen näher an A als an C. Für sie gilt folglich

$$|AM| < |CM| \leq |CM| + |BM| .$$

Entsprechendes gilt für die Punkte, die sich bzgl. der Mittelsenkrechten ZC der Seite $\overline{AB}$ in der Halbebene, die A enthält, befinden. Die Gültigkeit der Behauptung ist also noch für alle Punkte in dem Gebiet nachzuweisen, das durch die Halbgeraden ZB und ZC begrenzt wird (und A nicht enthält), einschließlich der Halbgeraden selbst.



Es sei M ein Punkt dieses Gebietes. Die Drehung um B um den Winkel 60° bildet das Dreieck BMC in das kongruente Dreieck $BM'A$ ab. Es folgt $|CM| = |AM'|$. Ferner ist $|BM| = |MM'|$, denn das Dreieck BMM' ist ja gleichseitig. Damit ergibt sich mithilfe der Dreiecksungleichung

$$|AM| \leq |AM'| + |MM'| = |CM| + |BM| ,$$

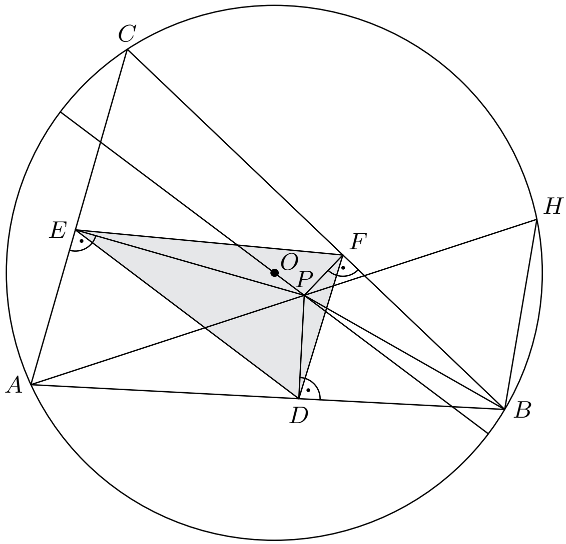
die Behauptung gilt folglich für alle Punkte M der Ebene. Gleichheit besteht genau dann, wenn M' auf der Strecke $\overline{AM}$ liegt. Dann ist, da das Dreieck BMM' gleichseitig ist, der Winkel $\measuredangle AMB = 60°$, und der Punkt M liegt nach dem Kehrsatz des Umfangswinkelsatzes auf dem Kreis k. Umgekehrt ist für jeden Punkt des Kreisbogens $\overset{\frown}{BC}$ von k der Winkel $\measuredangle AMB = 60°$ und damit liegt M' auf der Strecke $\overline{AM}$.

Also gilt die behauptete Ungleichung für alle Punkte der Ebene, und Gleichheit gilt genau für die Punkte des Bogens $\overset{\frown}{BC}$ des Umkreises, einschließlich B und C.

2023-7 Reiner Möwald, Germersheim

Für welchen Punkt P innerhalb eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC ist der Flächeninhalt des Dreiecks der Lotfußpunkte von P auf die drei Seiten des Dreiecks ABC maximal?

Lösung von Eckard Specht, Magdeburg:



Sei R der Umkreisradius des Dreiecks ABC und O der Umkreismittelpunkt. Da das Viereck $ADPE$ ein Sehnenviereck ist, gilt

$$\frac{\sin(\measuredangle PDE)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{|PE|}{|DE|} \quad \text{und} \quad \sin(\measuredangle PDE) = \sin(\measuredangle PAE) = \frac{|PE|}{|AP|}\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{|DE|}{|AP|} = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{a}{2R} \qquad \Rightarrow \qquad |DE| = \frac{a \cdot |AP|}{2R}\,.$$

Analog erhält man im Sehnenviereck $BFPD$

$$|DF| = \frac{b \cdot |BP|}{2R}\,.$$

Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks DEF mit Δ, so gilt

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin(\measuredangle FDE)\,. \tag{1}$$

Als nächstes stellen wir fest, dass $\measuredangle FDE = \measuredangle HBP$ ist, denn einerseits ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle APB &= 360° - \measuredangle FPE - \measuredangle EPA - \measuredangle BPF \\
&= 360° - (180° - \gamma) - \measuredangle EPA - \measuredangle BPF \\
&= 180° + \gamma - \measuredangle EPA - \measuredangle BPF \\
&= 180° + \gamma - (90° - \measuredangle PAE) - (90° - \measuredangle FBP) \\
&= \gamma + \measuredangle PAE + \measuredangle FBP = \gamma + \measuredangle PDE + \measuredangle FDP = \gamma + \measuredangle FDE
\end{aligned}$$

und andererseits $\measuredangle APB = 180° - \measuredangle BPH = \measuredangle AHB + \measuredangle HBP = \gamma + \measuredangle HBP$. Außerdem gilt

$$\sin(\measuredangle HBP) = \frac{|PH|}{|PB|} \cdot \sin\gamma\,.$$

Nun setzt man die Terme für $|DE|$, $|DF|$ und $\sin(\measuredangle HBP)$ in (1) ein:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot |AP|}{2R} \cdot \frac{b \cdot |BP|}{2R} \cdot \frac{|PH|}{|PB|} \cdot \sin\gamma = \frac{|AP| \cdot |PH|}{4R^2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \\
&= \frac{|AP| \cdot |PH|}{4R^2} \cdot \Delta'\,,
\end{aligned}$$

wobei Δ' der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks ABC ist. Nach dem Sehnensatz, angewandt auf den Umkreis, folgt

$$|AP| \cdot |PH| = (R - |OP|)(R + |OP|) = R^2 - |OP|^2$$

und somit ist

$$\Delta = \frac{R^2 - |OP|^2}{4R^2} \cdot \Delta'\,.$$

Man erkennt an dieser Formel, dass Δ maximal wird, wenn P mit dem Umkreismittelpunkt O zusammenfällt.

2023-8 Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien und Herzegowina

Man beweise für das Dreieck ABC die Ungleichung

$$\frac{s}{3} \geq \sqrt{\frac{r(4R + r)}{3}} \geq \sqrt[3]{sr^2}\,,$$

wobei s der halbe Umfang, r der Inkreis- sowie R der Umkreisradius sind.

Lösung von Gerhard Palme, Schwabmünchen:
Seien A der Flächeninhalt des Dreiecks und a, b, c die Längen der Seiten. Weiter seien

$$\text{LHS} := \frac{s}{3}, \quad \text{M} := \sqrt{\frac{r(4R+r)}{3}} \quad \text{und} \quad \text{RHS} := \sqrt[3]{sr^2}.$$

Verwendet werden für den Beweis die AM-GM-Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ (1), die Formeln für den Umkreisradius $R = \frac{abc}{4A}$ (2) und für den Inkreisradius $r = \frac{A}{s}$ (3) und die Heronsche Formel für den Dreiecksflächeninhalt $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (4) sowie die Ravi-Substitution $x := s-a$, $y := s-b$, $z := s-c$ (5), bei der

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{3s-(a+b+c)}{3} = \frac{3s-2s}{3} = \frac{s}{3} \quad (6)$$

gilt. Vor allem aber beruht der Beweis auf der Anwendung des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz. *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ gilt*

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+z}{3} &= \sqrt{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}+2(xy+yz+zx)}{9}} \\
&\overset{(1)}{\geq} \sqrt{\frac{\sqrt{x^2y^2}+\sqrt{y^2z^2}+\sqrt{z^2x^2}+2(xy+yz+zx)}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{xy+yz+zx+2(xy+yz+zx)}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{3(xy+yz+zx)}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \\
&\overset{(1)}{\geq} \sqrt{\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2y^2z^2}} = \sqrt[3]{xyz}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Beweis der Aufgabenstellung: $\frac{x+y+z}{3} = \frac{s}{3} = \text{LHS}$ wurde bereits in (6) gezeigt. Weiterhin gelten

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\\
&\quad\overset{(5)}{=} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}{3}}\\
&\quad= \sqrt{\frac{s^2-as-bs+ab+s^2-bs-cs+bc+s^2-cs-as+ca}{3}}\\
&\quad= \sqrt{\frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca}{3}}\\
&\quad= \sqrt{\frac{3s^2-2s\cdot 2s+ab+bc+ca}{3}} = \sqrt{\frac{3s^2-4s^2+ab+bc+ca}{3}}\\
&\quad= \sqrt{\frac{ab+bc+ca-s^2}{3}} = \sqrt{\frac{s^2-s\cdot 2s+ab+bc+ca}{3}}\\
&\quad= \sqrt{\frac{s^2-s(a+b+c)+ab+bc+ca}{3}}\\
&\quad= \sqrt{\frac{\frac{abc}{s}+\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}{3}}\\
&\quad\overset{(4)}{=} \sqrt{\frac{\frac{abc}{s}+\frac{A^2}{s^2}}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{A}{s}\left(\frac{abc}{A}+\frac{A}{s}\right)}{3}} \overset{(2),(3)}{=} \sqrt{\frac{r(4R+r)}{3}} = \text{M}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{xyz} &\overset{(5)}{=} \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt[3]{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\\
&\overset{(4)}{=} \sqrt[3]{\frac{A^2}{s}} = \sqrt[3]{s\cdot\frac{A^2}{s^2}} \overset{(3)}{=} \sqrt[3]{sr^2} = \text{RHS}\,.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Gültigkeit des Hilfssatzes ist somit alles gezeigt.

2023-9 Oleh Faynshteyn, Leipzig

Man löse die Gleichung

$$2\sin(3x) = 3\cos(x) + \cos(3x)\,.$$

Lösung von Stephan Hauschild, Chemnitz:

Zunächst werden die beiden „Dreifachwinkelformeln“ für die Kosinus- bzw. Sinusfunktion benutzt:

$$\begin{aligned} & 2\sin(3x) = 3\cos(x) + \cos(3x) \\ \Leftrightarrow \quad & 2(3\sin(x) - 4\sin^3(x)) = 3\cos(x) + 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \sin(x)\cdot(3 - 4\sin^2(x)) = 2\cos^3(x)\,. \end{aligned}$$

Für $\cos(x) = 0$ ist die letzte Gleichung nicht erfüllt, daher wird durch $\cos^3(x)$ dividiert:

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\left(\frac{3}{\cos^2(x)} - 4\,\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = 2\,.$$

Beachtet man die Definition vom Tangens und die Formel

$$\frac{1}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)\,,$$

ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} & \tan(x)\cdot(3 + 3\tan^2(x) - 4\tan^2(x)) = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3\cdot\tan(x) - \tan^3(x) = 2\,. \end{aligned}$$

Hierin wird nun $u \coloneqq \tan(x)$ substituiert. Man erhält $u^3 - 3u + 2 = 0$ bzw. dazu äquivalent $(u-1)^2(u+2) = 0$. Damit gibt es die beiden Lösungen $u_1 = 1$ und $u_2 = -2$. Nach Rücksubstitution führt das zu

$$\begin{array}{llllll} \tan(x) = 1 & \Leftrightarrow & x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi & \text{mit} & k_1 \in \mathbb{Z} & \text{und} \\ \tan(x) = -2 & \Leftrightarrow & x_2 = -\arctan(2) + k_2\pi & \text{mit} & k_2 \in \mathbb{Z}\,. & \end{array}$$

Da ausschließlich äquivalent umgeformt wurde, besteht die Lösungsmenge aus diesen beiden letztgenannten Lösungsgruppen.

2023-10 Mihály Bencze, Săcele, Rumänien

Man löse für $x, y \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$y^8 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 136\,.$$

Lösung von Gisela Schuller, Siegen:

Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ dann ist $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq 0$, da entweder alle Faktoren positiv sind, alle Faktoren negativ sind oder das Produkt null ist. Daher muss $y^8 \geq 136$ bzw. $|y| \geq 2$ sein. Umgeformt ist

$$\begin{aligned} y^8 - x(x+1)(x+2)(x+3) &= 136 \\ \Leftrightarrow \qquad y^8 &= x(x+1)(x+2)(x+3) + 136 \\ \Leftrightarrow \qquad y^8 &= (x^2+3x)(x^2+3x+2) + 136\,. \end{aligned}$$

Sei $x^2 + 3x =: s$. Dann gilt $s = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$, wegen $s \in \mathbb{Z}$ also $s \geq -2$. Weiter umgeformt ist

$$\begin{aligned} && y^8 &= s(s+2) + 136 \\ \Leftrightarrow && y^8 &= s^2 + 2s + 136 \\ \Leftrightarrow && y^8 &= (s+1)^2 + 135 \\ \Leftrightarrow && y^8 - (s+1)^2 &= 135 \\ \Leftrightarrow && (y^4 + (s+1)) \cdot (y^4 - (s+1)) &= 27 \cdot 5\,. \end{aligned}$$

Mit $u := y^4 \geq 16$ und $v := s+1 \geq -1$ gelten $u+v \geq 15$ und $(u+v)(u-v) = 27 \cdot 5$. Dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

a) $u + v = 135$ und $u - v = 1$ ergeben $u = 68$, das ist aber keine vierte Potenz $(u = y^4)$ in den ganzen Zahlen.

b) $u + v = 45$ und $u - v = 3$ ergeben $u = 24$, das ist aber keine vierte Potenz $(u = y^4)$ in den ganzen Zahlen.

c) $u+v = 27$ und $u-v = 5$ ergeben $u = 16$ und $v = 11$. Man erhält $y^4 = 16$ und $s = 10$, bzw. $y = \pm 2$ und $x^2 + 3x - 10 = 0$, also $x = 2$ oder $x = -5$.

d) $u + v = 15$ und $u - v = 9$ ergeben $u = 12$, was nicht sein kann.

Damit sind die Lösungspaare $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-5, 2)$ und $(-5, -2)$.

2023-11 Manfred Müller-Späth, Ahrensburg

Zwischen dem arithmetischen Mittel AM und dem harmonischen Mittel HM natürlicher Zahlen besteht bekanntlich die Beziehung AM ≥ HM.
Zu bestimmen sind alle Paare natürlicher Zahlen, für die der Unterschied beider Mittel gleich 1 ist.

Lösung von Ulrich Abel, Friedberg:

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung:

Es sei c eine natürliche Zahl, für die $2c$ nicht von einer Quadratzahl geteilt wird. Sämtliche Paare natürlicher Zahlen m, n, für die die Differenz von arithmetischem und harmonischem Mittel gleich c ist, sind durch

$$(ck(k+1), ck(k-1)) \quad \textit{und} \quad (ck(k-1), ck(k+1)) \quad \textit{mit} \quad k = 2, 3, \ldots$$

gegeben.

Es gelte

$$\frac{m+n}{2} = \frac{2mn}{m+n} + c\,.$$

Erweitern mit $2(m+n)$ liefert

$$\begin{aligned} && (m+n)^2 &= 4mn + 2c(m+n) \\ \Leftrightarrow && (m-n)^2 &= 2c(m+n) \\ \Leftrightarrow && (m-n)(m-n-2c) &= 4cn\,. \end{aligned}$$

Wenn $2c$ ein Produkt paarweise verschiedener Primzahlen ist, so ist $2c$ ein Teiler von $m - n$. O. B. d. A. sei $m > n$ und $m - n = 2c \cdot k$. Daraus folgt

$$2kc(2kc - 2c) = 4cn\,,$$

also $n = k(k-1)c$ und $m = n + 2kc = k\,(k+1)\,c$. Einsetzen bestätigt, dass diese Werte für $k = 2, 3, \ldots$ natürliche Zahlen sind, für die die Differenz von arithmetischem und harmonischem Mittel gleich c ist.

Diese Aufgabe ist der Spezialfall $c = 1$ mit den Lösungen $(k(k+1), k(k-1))$, $(k(k-1), k(k+1))$ für natürliche Zahlen $k \geq 2$.

2023-12 ursprünglich gestellt als Aufgabe B 36 in $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 6/1970

In einem quadratischen Schema 9×9 sind alle ganzen Zahlen von 1 bis 81 eingetragen. Man zeige, dass es zwei benachbarte Zahlen gibt, deren Differenz nicht kleiner als 6 ist.

Lösung von Reiner Möwald, Germersheim:

Zunächst gehen wir davon aus, dass Nachbarschaft auch diagonal gilt, ein Feld also bis zu 8 Nachbarfelder haben kann. Wir führen einen Widerspruchsbeweis mit der Annahme, dass es eine Belegung des 9×9-Spielfeldes gibt, sodass die Differenz zweier benachbarter Zahlen stets kleiner als 10 ist.

Nun gilt, dass man von jedem beliebigen Feld des Spielfeldes in maximal 8 Zügen jedes andere Feld erreichen kann (analog den Bewegungen der Spielfigur des Königs im Schachspiel). Dabei läuft der König so lange diagonal, bis er nur noch horizontal bzw. vertikal zum Ziel laufen muss.

Wegen der größten Differenz zweier beliebiger Felder des Spielfeldes gilt:

$$\begin{aligned} 81 - 1 &\leq 8 \cdot 9 \\ 80 &\leq 72 \rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Somit haben wir einen Widerspruch erzeugt. Folglich gilt allgemein für ein $n \times n$-Spielfeld, dass es zwei (horizontale, diagonale oder vertikale) Nachbarzahlen gibt, deren Differenz mindestens $n + 1$ ist.

Nun betrachten wir Nachbarn nur im horizontalen und vertikalen Sinne, also analog den Bewegungsrichtungen des Turmes im Schachspiel. Wie oben führen wir einen Widerspruchsbeweis, diesmal mit der Annahme, dass es eine Belegung des Spielfeldes gibt, sodass die Differenz zweier benachbarter Zahlen stets kleiner als 6 ist. Es gilt:

Von jedem beliebigen Feld des Spielfeldes kann man in maximal 16 Zügen jedes andere Feld erreichen. Der maximale Weg liegt hierbei genau dann vor, wenn sich Start und Ziel in diagonal gegenüberliegenden Eckfeldern des Spielfeldes befinden. Wegen der größten Differenz zweier beliebiger Felder des Spielfeldes und der maximalen Differenz 5 zweier benachbarter Felder gilt:

$$81 - 1 \leq 5 \cdot 16 = 80\,.$$

Folglich muss der kürzeste Weg zwischen dem Feld mit der 1 und dem Feld mit der 81 die Länge 16 haben, die beiden Felder liegen also in gegenüberliegenden Ecken. Der Weg (inklusive Start- und Zielfeld) führt dann über die Zahlen $z_i = 1 + 5 \cdot i$, $i = 0, \ldots, 16$. Zwischen den beiden Feldern in gegenüberliegenden Ecken gibt es aber mehrere Wege der Länge 16 und nur einer von diesen kann über die Zahlen z_i führen. Auf den anderen Wegen muss es daher einen Schritt mit einer Differenz größer als 5 geben. Somit haben wir einen Widerspruch erzeugt und es gibt mindestens ein Paar benachbarter Felder (horizontal oder vertikal), deren Differenz mindestens 6 beträgt.

2023-14 Oleh Faynshteyn, Leipzig

Man betrachte ein Dreieck, dessen Seitenlängen durch drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen ausgedrückt werden. R sei der Umkreis- und r der Inkreisradius. Man zeige

$$R = 2r + \frac{1}{2r}\,.$$

Lösung von Bernd Fritzen, Münster:

Das gegebene Dreieck habe die Seitenlängen a, $b = a + 1$ und $c = a + 2$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $a \geq 2$ (wegen der Dreiecksungleichung). Mit F sei die Dreiecksfläche bezeichnet. Dann gelten

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c}{2} = \frac{3a+3}{2} = \frac{3(a+1)}{2}\,, \\ R &= \frac{abc}{4F} = \frac{a(a+1)(a+2)}{4F}\,, \\ r &= \frac{F}{s} = \frac{2F}{3(a+1)}\,. \end{aligned}$$

Nach Heron ist

$$\begin{aligned} & F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{3(a+1)}{2} \cdot \frac{a+3}{2} \cdot \frac{a+1}{2} \cdot \frac{a-1}{2} \\ \Rightarrow\ & 16F^2 = 3(a+1)^2(a+3)(a-1)\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 2r + \frac{1}{2r} &= \frac{4F}{3(a+1)} + \frac{3(a+1)}{4F} = \frac{16F^2 + 9(a+1)^2}{12(a+1)F} \\ &= \frac{3(a+1)^2(a+3)(a-1) + 9(a+1)^2}{12(a+1)F} \\ &= \frac{a+1}{4F} \cdot ((a+3)(a-1)+3) = \frac{a+1}{4F} \cdot (a^2+2a) \\ &= \frac{(a+1)a(a+2)}{4F} = R\,, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

2023-15 Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbien

Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $ab + bc + ca = M$. Man zeige

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{1}{M}\,(M+3)^2\,.$$

Lösung von Walter Schmidt, Wetzlar:

Wir setzen $x := a + \frac{1}{b}$, $y := b + \frac{1}{c}$, $z := c + \frac{1}{a}$. Im Allgemeinen gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}&\Big(a+\frac{1}{b}\Big)^2+\Big(b+\frac{1}{c}\Big)^2+\Big(c+\frac{1}{a}\Big)^2\\&\qquad\ge\Big(a+\frac{1}{b}\Big)\Big(b+\frac{1}{c}\Big)+\Big(b+\frac{1}{c}\Big)\Big(c+\frac{1}{a}\Big)+\Big(c+\frac{1}{a}\Big)\Big(a+\frac{1}{b}\Big)\\&\qquad\ge ab+\frac{a}{c}+1+\frac{1}{bc}+bc+\frac{b}{a}+1+\frac{1}{ca}+ca+\frac{c}{b}+1+\frac{1}{ab}\\&\qquad=ab+bc+ca+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+3+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\,.\end{aligned}$$

Mittels AM-GM-Ungleichung und AM-HM-Ungleichung gelten

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\frac{b}{a}\frac{c}{b}}=3 \qquad\text{und}\qquad \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}\,.$$

Damit ergibt sich

$$\Big(a+\frac{1}{b}\Big)^2+\Big(b+\frac{1}{c}\Big)^2+\Big(c+\frac{1}{a}\Big)^2\ge M+6+\frac{9}{M}=\frac{M^2+6M+9}{M}=\frac{1}{M}(M+3)^2\,.$$

Die Auflösung der √WURZEL-Aufgaben wird im nächsten Heft fortgesetzt.

Drei Gleichverteilungen auf Flächen

von Armin Singer, Jena

Beim Entwurf eines Modells eines Himmelskörpers mit vielen Einschlagskratern war einmal mehr die Frage aufgekommen, wie man die Orte auf einer Kugeloberfläche zufällig, gleichverteilt am besten auswählen könnte. Weil eine Recherche im Internet, die möglicherweise nicht gründlich genug war, zwar ein brauchbares Ergebnis, aber nur eine allzu knappe Begründung zu Tage brachte, soll hier versucht werden, diese ausführlicher zu formulieren.

Der naheliegende Gedanke, die beiden Winkel, die bei Kugelkoordinaten eine Rolle spielen, gleichverteilt aus dem Intervall $[0, 2\pi)$ bzw. $[0, \pi]$ zu wählen, führt augenscheinlich nicht zu einem gleichmäßigen Kratermuster. Die Nord- und die Südpolarregion werden viel öfter getroffen als Gebiete in Äquatornähe. Es ist aber nicht einzusehen, warum das so sein sollte.

Darüber hinaus ergab sich etwas später ein Anlass, auch einmal über eine entsprechende Fragestellung für die Oberfläche eines Rotationstorus nachzudenken. Hier bemerkt man bei einem ersten Versuch eine unerwünschte Häufung im inneren Bereich.

Nachfolgend werden für die zwei genannten Probleme Lösungen angegeben. Beide sind nicht schwer zu finden, wenn klar geworden ist, was man tun muss.

Gleichverteilung auf einer Kugeloberfläche

Man benutzt Kugelkoordinaten zur Beschreibung. Rotationssymmetrie bezüglich des Winkels φ gestattet das folgende Vorgehen. Für den Oberflächeninhalt einer Kugel mit dem Radius $r > 0$ gilt (siehe z. B. [1]):

$$A_{\text{Kugel}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi = 4\pi r^2 \,.$$

Dies umgeformt ergibt

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = 1 \quad \left(= \int_0^1 \mathrm{d}x \right).$$

Mittels einer geeigneten Substitution $x = s(\theta)$ mit $s(0) = 0$, $s(\pi) = 1$ und

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\sin\theta$$

soll mit deren Umkehrfunktion s^{-1} eine im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte zufällige Größe ξ transformiert werden. Man erhält durch Integration

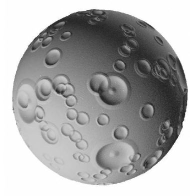
$$s(\theta) = -\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2} \,.$$

Ergebnis: Eine Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche kann durch die folgenden Gleichungen angegeben werden:

$$\varphi = 2\pi\eta \,, \qquad \theta = \arccos(2\xi - 1) \,,$$

wobei η und ξ unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ sind.

Der beim Argument vom Arkuskosinus heimlich stattgefundene Vorzeichenwechsel ist dabei nur von kosmetischer Natur. Man darf $1-\xi$ statt ξ nehmen, da beide das gleiche Verteilungsgesetz besitzen.



Damit kann man Einschlagsorte von Meteoriten zufällig wählen, ohne dass irgendwo systematische Häufungen auffallen. Für die Gestaltung der Krater als Vertiefung mit Ringwall und gegebenenfalls einem Zentralberg wird der Kugelradius in einer Umgebung des Einschlagspunktes geringfügig variiert durch Multiplikation mit einem Faktor nahe 1. Genauer, man multipliziert mit einer auf der Kugeloberfläche definierten Funktion, die außerhalb des betreffenden Kratergebietes den Wert 1 hat und nur beim Krater davon geeignet abweicht. Kratergebiete können sich auch überlappen. Man berechnet dazu für jeden Punkt der Kugeloberfläche den Abstand vom Kugelmittelpunkt als das Produkt von Radius und den Werten aller Kraterfunktionen an diesem Punkt. Als einen Mangel dieses Ansatzes kann man die Kommutativität der Einschlagswirkungen ansehen. Diese ist in der Realität so sicher nicht zu beobachten.

Gleichverteilung auf einer Torusoberfläche

Für den Oberflächeninhalt eines Rotationstorus mit den Radien $R > r > 0$ gilt (siehe dazu auch [2])

$$A_{\text{Torus}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi^2 rR\,.$$

Dies umgeformt ergibt

$$\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}(R + r\cos\psi)\,\mathrm{d}\psi = 1 \qquad \left(= \int_0^1 \mathrm{d}x\right).$$

Gesucht ist nun eine Substitution $x = t(\psi)$ mit $t(0) = 0$, $t(2\pi) = 1$ und

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\psi} = \frac{1}{2\pi R}(R + r\cos\psi)\,,$$

um mittels ihrer Umkehrfunktion t^{-1} die im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte zufällige Größe η zu transformieren. Man erhält durch Integration

$$t(\psi) = \frac{1}{2\pi}\left(\psi + \frac{r}{R}\sin\psi\right) + 0\,.$$

Leider lässt sich für t^{-1} kein schöner Ausdruck mit einer Arkusfunktion angeben. Im Zweifelsfall muss man sich mit einer numerischen Näherungslösung begnügen. Und selbstverständlich bleibt zu prüfen, ob t^{-1} im betrachteten Intervall $[0,1]$ überhaupt definiert ist.

Ergebnis: Eine Gleichverteilung auf der Torusoberfläche kann durch die beiden folgenden Gleichungen angegeben werden:

$$\varphi = 2\pi\eta\,, \qquad \psi = t^{-1}(\xi)\,.$$

Wie schon bei der Kugel handelt es sich um einen rotationssymmetrischen Körper. Deswegen reicht beim Parameter φ wiederum eine einfache Skalierung. Bei der Kugel spielte der Radius im Ergebnis keine Rolle. Beim Torus taucht dagegen das Verhältnis der beiden Radien auf. Je kleiner es ist, desto weniger weicht das Ergebnis von dem ab, was man intuitiv für einen Zylinder – dann in Zylinderkoordinaten – formulieren würde.

Eine letzte Anmerkung: Nach diesem Schema gelangt man beispielsweise auch zu einer in Polarkoordinaten angegebenen Gleichverteilung auf der von einem Kreis mit dem Radius $R > 0$ berandeten Fläche:

$$r = R\sqrt{\xi}\,, \qquad \varphi = 2\pi\rho\,.$$

Siehe dazu auch [3].

Literatur

[1] Wikipedia: *Kugel*. https://de.wikipedia.org/wiki/Kugel

[2] Wikipedia: *Torus*. https://de.wikipedia.org/wiki/Torus

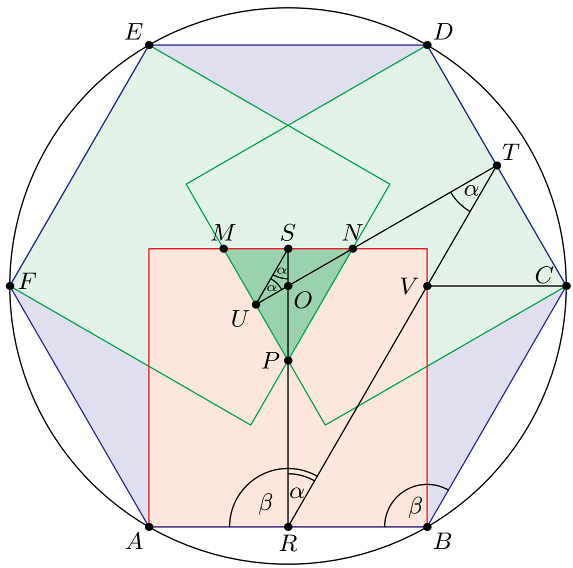
[3] Thilo Negendanck: *Gleichverteilte Punkte in einem Kreis*. https://thinegen.eu/de/blog/2021/11/zufallspunkt-kreis/

Lösungen der Wochenaufgaben 753 und 756

Aufgabe 753, Lösung von Paulchen Hunter, Heidelberg

Blaue Punkte

Seien r der Radius des Kreises, a die Seitenlänge des Sechsecks und damit auch die der Quadrate, A_Q die Fläche der Quadrate, A_S die Fläche des Sechsecks sowie p der Prozentanteil von A_Q an A_S und seien weiter O der Mittelpunkt des Kreises sowie R, S, T und U die Mittelpunkte der jeweiligen Quadratseiten wie rechts dargestellt. Dann gilt



$$a = r = 4\,\text{cm}\,,$$

$$\begin{aligned} A_Q &= a^2 = (4\,\mathrm{cm})^2 = 16\,\mathrm{cm}^2\,, \\ A_S &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (4\,\mathrm{cm})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 16\,\mathrm{cm}^2\,, \\ p &= \frac{A_Q}{A_S} \cdot 100\,\% = \frac{16\,\mathrm{cm}^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 16\,\mathrm{cm}^2} \cdot 100\,\% = \frac{200}{3\sqrt{3}}\,\% \approx 38{,}490\,0179\,\%\,. \end{aligned}$$

Ungefähr 38,49 Prozent der Sechseckfläche werden vom roten Quadrat überdeckt.

Rote Punkte

Der Flächeninhalt A_{PNM} des aus Symmetriegründen gleichseitigen Dreiecks PNM lässt sich wie folgt berechnen: Das gleichschenklige Trapez $RBCT$ (mit Innenwinkeln 120° und 60°) besteht aus dem Parallelogramm $RBCV$ und dem gleichseitigen Dreieck VCT. Daher gilt $|RV| = |BC| = a$ und $|VT| = |CT| = \frac{a}{2}$, also

$$|RT| = |RV| + |VT| = a + \frac{a}{2} = 4\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{cm} = 6\,\mathrm{cm}\,.$$

Es ist $\alpha = \beta - 90° = 120° - 90° = 30°$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |RO| &= \frac{|RT|}{2 \cdot \cos\alpha} = \frac{6\,\mathrm{cm}}{2 \cdot \cos 30°} = \frac{6\,\mathrm{cm}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}\,, \\ |OS| &= a - |RO| = 4\,\mathrm{cm} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm} = (4 - 2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}\,, \\ |US| &= 2 \cdot |OS| \cdot \cos\alpha = 2 \cdot (4 - 2\sqrt{3})\,\mathrm{cm} \cdot \cos 30° = \frac{2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm} \\ &= (4\sqrt{3} - 6)\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

Da auch MUS ein gleichseitiges Dreieck ist, gilt $|US| = |MS|$ und damit

$$|MN| = 2 \cdot |US| = 2 \cdot (4\sqrt{3} - 6)\,\mathrm{cm} = (8\sqrt{3} - 12)\,\mathrm{cm}\,.$$

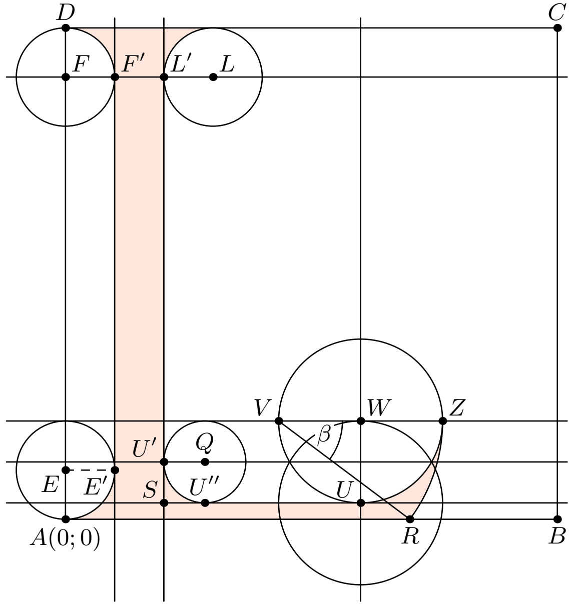
Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_{PNM} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |MN|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (8\sqrt{3} - 12)^2\,\mathrm{cm}^2 = (84\sqrt{3} - 144)\,\mathrm{cm}^2 \\ &\approx 1{,}492\,2678\,\mathrm{cm}^2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 756, Lösung von Magdalene aus Chemnitz

Legt man den Koordinatenursprung in den Punkt A, ergeben sich für die übrigen Punkte folgende Koordinaten (in cm), welche man aus der vorgegebenen Konstruktionsbeschreibung der Figur ermitteln kann:

$A(0;0)$, $B(10;0)$,
$C(10;10)$, $D(0;10)$,
$E(0;1)$, $F(0;9)$,
$L(3;9)$, $Q(\frac{17}{6};\frac{7}{6})$,
$S(2;\frac{1}{3})$, $U(6;\frac{1}{3})$,
$V(\frac{13}{3};2)$, $W(6;2)$,
$Z(\frac{23}{3};2)$.



Die x-Koordinate des Punkts R kann als Schnittpunkt des Kreises um V (mit dem Radius $\frac{23}{3}-\frac{13}{3}$) mit der Geraden $y=0$ wie folgt berechnet werden:

$$\left(x-\frac{13}{3}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{13}{3}\right)^2+4=\frac{100}{9}$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{100-36}{9}$$
$$\Leftrightarrow\quad x-\frac{13}{3}=\frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow\quad x=7\,.$$

Für R ergeben sich die Koordinaten $R(7;0)$.

Blaue Punkte

Der Umfang U_{links} auf der linken Seite des Buchstabens „L“ von A bis D besteht aus den Summanden

$U_1=$ Bogenlänge von $\widehat{AE'}$, $\qquad U_2=$ Bogenlänge von $\widehat{DF'}$,
$U_3=$ Streckenlänge von $E'F'$.

Es ergibt sich

$$U_{\text{links}} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{\pi}{2}\,\text{cm} + \frac{\pi}{2}\,\text{cm} + 8\,\text{cm} = (8+\pi)\,\text{cm} \approx 11{,}142\,\text{cm}\,.$$

Der Umfang auf der linken Seite des Buchstabens „L“ von A bis D beträgt etwa 11,142 cm.

Rote Punkte

Der Restumfang U_{rechts} des Buchstabens „L“ von A über R und Z bis zum D besteht aus den Summanden

$$\begin{aligned}
U_1 &= \text{Streckenlänge von } AR\,, & U_2 &= \text{Bogenlänge von } \widehat{RZ}\,,\\
U_3 &= \text{Bogenlänge von } \widehat{ZU}\,, & U_4 &= \text{Streckenlänge von } U''U\,,\\
U_5 &= \text{Bogenlänge von } \widehat{U''U'}\,, & U_6 &= \text{Streckenlänge von } U'L'\,,\\
U_7 &= \text{Bogenlänge von } \widehat{DF'}\,, & U_8 &= \text{Streckenlänge von } FL\,.
\end{aligned}$$

Mit den Vektoren $\vec{g} = \overrightarrow{VZ} = \binom{10/3}{0}$ und $\vec{h} = \overrightarrow{VR} = \binom{8/3}{-2}$ kann über zwei verschiedene Flächenformeln für das Dreieck VZR der Winkel β bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
&2A_{VZR} = |\vec{g}|\cdot|\vec{h}|\cdot\sin\beta = |\vec{g}\times\vec{h}|\\
&\Rightarrow\quad \frac{10}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdot\sin\beta = \left|\frac{10}{3}\cdot(-2) - 0\cdot\frac{8}{3}\right|\\
&\Rightarrow\quad \sin\beta = \frac{20}{3}\cdot\frac{9}{100} = 0{,}6 \qquad\Rightarrow\qquad \beta \approx 36{,}87^\circ\,.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$U_2 \approx 2\pi\cdot\frac{10}{3}\,\text{cm}\cdot\frac{36{,}87^\circ}{360^\circ} \approx 2{,}145\,\text{cm}\,.$$

Insgesamt ist

$$\begin{aligned}
&U_{\text{rechts}}\\
&\quad\approx 7\,\text{cm} + 2{,}145\,\text{cm} + \frac{5\pi}{6}\,\text{cm} + \frac{19}{6}\,\text{cm} + \frac{5\pi}{12}\,\text{cm} + \frac{47}{6}\,\text{cm} + \frac{\pi}{2}\,\text{cm} + 3\,\text{cm}\\
&\quad= 23{,}145\,\text{cm} + \frac{7\pi}{4}\,\text{cm} \approx 28{,}643\,\text{cm}\,.
\end{aligned}$$

Der Restumfang des Buchstabens „L“ beträgt etwa 28,643 cm.

Caribou-Wettbewerbe

von Thomas Wolf, St. Catharines, Kanada

In Deutschland gibt es viele lokale und auch bundesweite Mathematikwettbewerbe. Hier ist ein weiterer: *Caribou Contests*, online unter

https://cariboutests.com > ‚Language' > ‚Deutsch'.

Was ist neu an ihm und welche mathematischen Lerninhalte hat er außerhalb der Wettbewerbe zu bieten?

Organisatorisches

Jedes Schuljahr findet ein *Caribou Cup* statt, der aus sechs Wettbewerben besteht (Oktober, November, Januar, Februar, April und Mai). Jeder Wettbewerb ist in sich abgeschlossen. Es ist möglich, an nur einem teilzunehmen, aber auch an mehreren oder allen. Die Wettbewerbslevel erstrecken sich über sieben Klassenstufen (Vorschule/Klasse 1, 2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10, 11/12) und können in einer von acht Sprachen durchgeführt werden, neuerdings auch in Deutsch. Für die Caribou-Cup-Wertung zählen die besten fünf Resultate der sechs Wettbewerbe. Für jeden Test stehen einem Teilnehmer 50 Minuten zur Verfügung.

Tests werden automatisch ausgewertet. Resultate, einschließlich einer Teilnehmerurkunde, können schon am Tag nach einem Test heruntergeladen werden. Man kann sich einzeln oder auch durch eine Lehrkraft der eigenen Schule registrieren. Alle Informationen zu den Wettbewerben sind online nach dem Einloggen abrufbar. Es ist keinerlei Kommunikation mit den Veranstaltern nötig.

Inhaltliches

Jeder Wettbewerb hat mindestens eine interaktive Frage von einem der 25 Themen, die unter ‚Vorbereiten' > ‚Spiele' > ‚Alle Spiele' einsehbar sind. Die interaktive Challenge des nächsten Tests wird auf der Homepage unter ‚Caribou News' zwei Wochen vorher angekündigt.

Wie man bei den vorherigen (frei zugänglichen) Oktoberwettbewerben sieht, gibt es ein weites Spektrum von Fragen. Für jeden ist etwas dabei, auch für Schülerinnen und Schüler, die Mathematik nicht zu ihren Stärken zählen.

Die 25 interaktiven Challenges unter ‚Vorbereiten' > ‚Spiele' > ‚Alle Spiele' haben unten eine Taste ‚Zum Nachdenken' (‚Food for Thought'), wo das Spiel analysiert wird, mathematische Sätze und deren Beweise hergeleitet werden und wo man in Themen wie Kombinatorische Spieltheorie oder Knotentheorie eingeführt wird. GeomeTree ist eine Seite mit über

50 interaktiven Arbeitsblättern von einfachen Konstruktionen bis hin zum regelmäßigen 17-Eck. INDUCTION bewertet interaktiv eingegebene Beweise unter Anwendung des automatischen Beweisverifikationssystems PROVER9.

Diese Onlineressourcen eignen sich für einzelne interessierte Schüler, Lehrer wie auch für Matheklubs an Schulen.

Finanzielles

Die Oktoberwettbewerbe des jeweiligen Vorjahres können kostenlos ausprobiert werden, um sich ein Bild zu machen (‚Vorbereiten‘ > ‚Vorherige Tests‘ > ‚Einen vergangenen Test durchführen‘).

Auch der erste Wettbewerb im Oktober ist bei Schulanmeldung kostenlos, für einen oder alle weiteren ist eine einmalige Jahresgebühr nötig. Man kann beide ausprobieren, um zu entscheiden, ob man den Rest des Jahres teilnehmen will oder nicht.

Außer Teilnahmecodes für einzelne Schülerinnen und Schüler gibt es auch Codes für Schulen mit einer unbegrenzten Zahl von Teilnehmenden. Einzelheiten findet man unter ‚Shop‘.

Entstehungsgeschichte

Caribou Contests wurden 2009 von Thomas Wolf, Professor an der Brock University in St. Catharines, Kanada gegründet. Er hat in Jena (dem Standort der $\sqrt{\text{WURZEL}}$) Physik studiert, promoviert und in Mathematik habilitiert. Als früherer Teilnehmer an DDR-Mathematik-Olympiaden und einer Internationalen Mathematik-Olympiade startete er in Kanada einen Onlinewettbewerb, um seinem Sohn ähnliche Möglichkeiten zu geben. Die Teilnehmerzahl und auch die Zahl der mittlerweile 42 teilnehmenden Länder wuchsen schell. Seit diesem Jahr kann man auch an *Coding Contests* und *Calcrostic Contests* teilnehmen. Mehr dazu findet man auf der Webseite.

Na dann

Schauen Sie sich doch mal auf https://cariboutests.com > ‚Language‘ > ‚Deutsch‘ und ‚Vorbereiten‘ vorherige Wettbewerbe und Challenges mit deren mathematischem Hintergrund an.

Nehmen Sie am kostenlosen Oktoberwettbewerb teil, und wenn es Ihnen gefallen hat, dann können Sie sich immer noch für den Rest das Jahres registrieren.

Ein Calcrostic-Rätsel

Zum Abschluss möchten wir Ihnen ein von *Caribou Contests* kreiertes Rätsel vorstellen, wie es des Öfteren für alle Altersklassen in Wettbewerben auftritt, nur viel einfacher, sodass es selbst in Klasse 2 gelöst werden kann. Das folgende Rätsel ist nicht für Wettbewerbe gedacht.

Jeder Buchstabe ist durch eine Ziffer zu ersetzen, sodass alle sieben Zeilen, sieben Spalten, elf Diagonalen von links oben nach rechts unten und elf Diagonalen von rechts oben nach links unten Null ergeben. Wie gewohnt ist die linke Ziffer einer Zahl ungleich Null sowie auch Zähler von Brüchen ungleich Null sind. Brüche sind gekürzt.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
-eb & + & \frac{-jch}{d} & + & e & - & d & + & h & + & \frac{-j}{d} & - & -jjf \\
- & - & \div & + & - & + & - & + & + & - & - & - & + \\
\frac{-jch}{d} & - & \frac{-jjj}{d} & - & \frac{-igi}{a} & - & i & \times & a & + & \frac{-jae}{jc} & \div & \frac{-j}{d} \\
- & + & + & + & - & - & + & + & - & + & + & - & - \\
\frac{jbh}{d} & + & jd & + & g & - & \frac{-cg}{a} & - & \frac{jfd}{e} & - & \frac{eig}{a} & + & \frac{dce}{jc} \\
- & - & - & - & - & - & + & - & - & - & - & + & + \\
\frac{-eec}{a} & + & jbf & + & \frac{ca}{jc} & + & \frac{-iacf}{jc} & - & \frac{-dga}{d} & - & \frac{-eef}{jc} & - & \frac{-iih}{a} \\
- & - & + & + & + & + & + & - & + & + & + & - & - \\
-jbi & + & \frac{hd}{e} & - & \frac{-fai}{a} & - & \frac{ga}{d} & + & \frac{-ihj}{jc} & \div & \frac{j}{d} & + & \frac{jiah}{jc} \\
- & + & \times & + & - & - & + & - & + & - & - & - & - \\
\frac{db}{e} & + & h & - & \frac{afa}{jc} & - & \frac{-ddcf}{jc} & - & \frac{-ihi}{a} & - & \frac{jdje}{jc} & \div & \frac{j}{d} \\
+ & + & - & + & + & - & \div & + & - & - & + & + & - \\
\frac{-jebi}{a} & + & \frac{-db}{e} & - & aa & - & \frac{-j}{d} & - & \frac{if}{e} & + & \frac{-j}{d} & - & \frac{-deag}{a}
\end{array}$$

Die Lösung der Aufgabe steht im nächsten Heft.

Aufgabe der Woche 761

von Thomas Jahre, Chemnitz

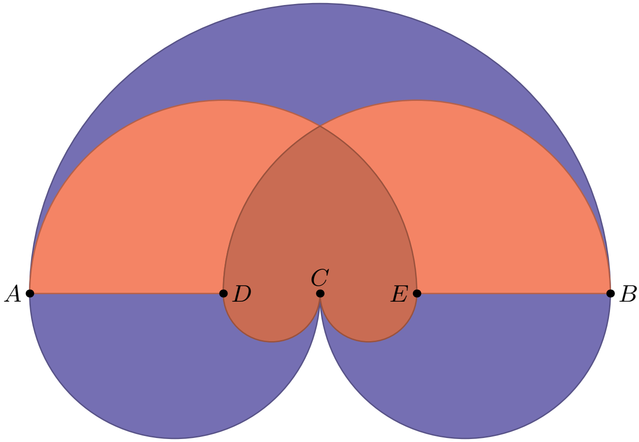
An dieser Stelle veröffentlichen wir wieder eine Wochenaufgabe des Chemnitzer Schulmodells. Die unterschiedlich schweren Teilaufgaben werden mit verschiedenfarbigen Punkten bewertet. Einsendungen bitte bis zum **12. Oktober 2023** an

wochenaufgabe@schulmodell.eu oder wochenaufgabe@gmx.de.

Das Aufgabenarchiv und aktuelle Aufgaben findet man unter der Adresse

www.schulmodell.eu/aufgabe-der-woche.html.

Viel Spaß beim Bearbeiten der Aufgabe!



„Schaut mal, bei meiner Konstruktion hat sich ein rotes Herz ergeben", sagte Maria. „Sind das alles Halbkreise, die du verwendet hast?", fragt Lisa nach, der das Bild richtig gut gefällt.

Die Punkte A, D, E und B sind jeweils 4 cm von einander entfernt. Bei D und C sind es 2 cm.

Wie groß sind äußerer Umfang und Flächeninhalt der blauen Flächen? *6 blaue Punkte*

Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt des roten Herzens? *6 rote Punkte*

$\sqrt{\text{WURZEL}}$-Aufgaben

Korrektur zu Aufgabe **2023-39**: Auf der linken Seite der Ungleichung sind die Zähler der Brüche ebenfalls zu quadrieren. Zu zeigen ist also

$$\frac{a^2}{s_a^2} + \frac{b^2}{s_b^2} + \frac{c^2}{s_c^2} \geq \frac{16}{27}\left(8 - \frac{5r}{2R}\right).$$

2023-43 – Gerald Irsigler, Berlin

Die Primzahlen seien der Größe nach geordnet mit $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ bezeichnet. Weiterhin seien Teilmengen der natürlichen Zahlen A_i für $i \geq 1$ folgendermaßen rekursiv definiert: A_1 enthalte alle natürlichen Zahlen, die durch p_1 teilbar sind. A_2 enthalte alle durch p_2 teilbaren Zahlen, die nicht in A_1 liegen. A_3 enthalte alle durch p_3 teilbaren Zahlen, die nicht in A_1 und A_2 liegen usw. Man zeige: Für jedes $i \geq 1$ divergiert die Reihe $\sum\limits_{a \in A_i} \frac{1}{a}$.

2023-44 – Reiner Möwald, Germersheim

Es sei $p(n)$ die Anzahl aller rechtwinkligen Dreiecke mit ausschließlich ganzzahligen Seitenlängen, in denen eine (beliebige) Seite die Länge n besitzt. Man bestimme für alle positiven ganzen Zahlen r die Werte $p(2^r)$ und $p(3^r)$.

2023-45 – Oleh Faynshteyn, Leipzig

Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, dem halben Umfang s sowie den Höhen h_a, h_b, h_c. Man zeige:

$$\frac{a^2}{a+h_c} + \frac{b^2}{b+h_a} + \frac{c^2}{c+h_b} \geq 4s(2-\sqrt{3})\,.$$

2023-46 – Wilfried Haag, Korntal

Gegeben sei ein Rechteck $BCDE$. Der Punkt A sei definiert als der Schnittpunkt der Diagonalen CE und des Kreises mit Mittelpunkt E und Radius $|DE|$. Man zeige: Im Dreieck ABC schneiden sich die Höhe von A, die Seitenhalbierende von B und die Winkelhalbierende von C in einem Punkt.

2023-47 – Joachim Jäger, Saarbrücken

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den gegenüberliegenden Seiten a, b, c (aufgefasst als Geraden). Weiter sei O ein von A, B und C verschiedener Punkt in der Ebene des Dreiecks. Dann schneide die Senkrechte zu $\overline{OA}$ durch O die Seite a im Punkt P. Analog seien Q und R als Schnittpunkte der Senkrechten von $\overline{OB}$ bzw. $\overline{OC}$ durch O mit b bzw. c definiert. Man zeige: P, Q und R liegen auf einer Geraden.

2023-48 – ursprünglich gestellt als Aufgabe T 63 in $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 12/1987

Man berechne x:

$$7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}\,.$$

Einsendeschluss für die Aufgaben 2023-31 bis 2023-60 ist der 1. Februar 2024.

Impressum Herausgeber: Wurzel – Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten e. V.

Redaktion: Andreas Berger, Sebastian Fachet, Tim Fritzsche, Stephanie Hercher, Marta Imke, Paul Köppert, Hauke Rehr, Sebastian Stock (v. i. S. d. P.), Frank Thiemicke
Anschrift: Wurzel, FSU Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, 07737 Jena
Telefon: (03641) 9 46006

E-Mail: redaktion@wurzel.org
Internet: www.wurzel.org
Bankverbindung: HypoVereinsbank Jena
IBAN: DE21 8302 0087 0004 1306 18
SWIFT/BIC: HYVEDEMM463
Preis: Jahresabonnement mit Versand im Inland 30 €. Bestellungen und weitere Informationen direkt bei der Redaktion oder im Internet.

ISSN: 0232–4539
Vertriebskennzeichen: F 6381
Artikel-Nummer: 10932
Druck: Saxoprint GmbH, Dresden

Redaktionsschluss: 1. 9. 2023

Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ ist eine Zeitschrift für Mathematik und erscheint monatlich.

In dieser Ausgabe lesen Sie:

Titelbild:

Illustration zum Artikel „Drei Gleichverteilungen auf Flächen“: Der Himmelsdonut von Nebra